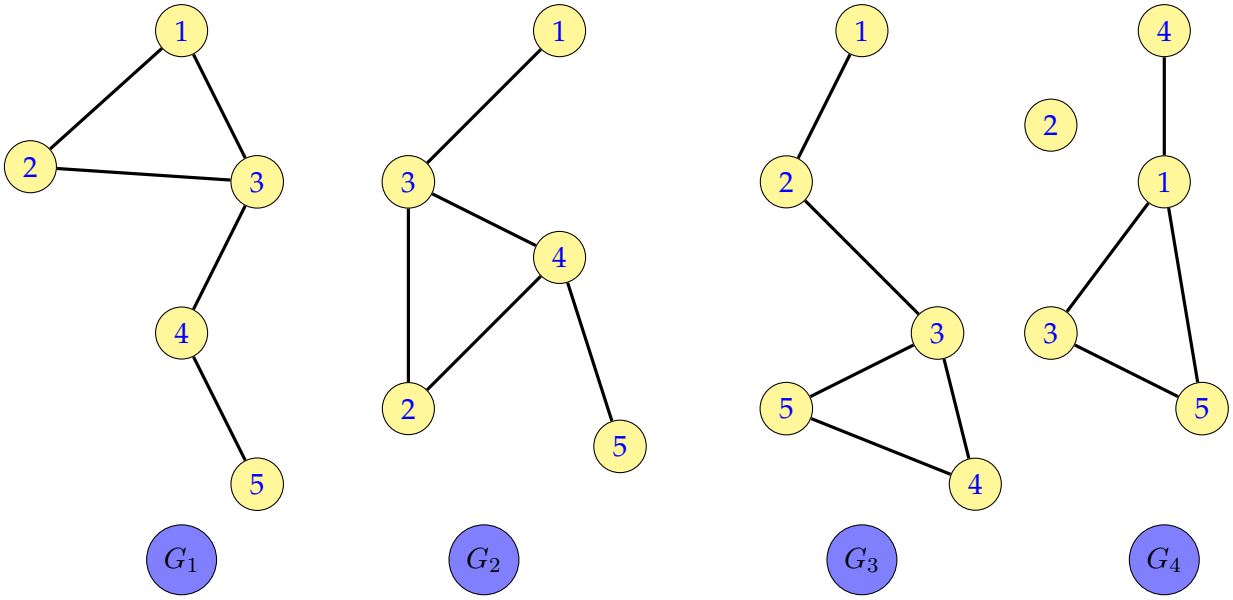
Mathématiques 2
Correction

Problème 1

Nombre chromatique d'un graphe

1.



2. 2. Il suffit de considérer l'application $\varphi : S_1 \to S_3$ définie par $\varphi(1) = 5$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 3$, $\varphi(4) = 2$ et $\varphi(5) = 1$. On a bien φ est une bijection et $\forall (s,t) \in S_1,\ \ \{s,t\} \in A_1 \Leftrightarrow \{\varphi(s), \varphi(t)\} \in A_3$. Donc G_1 et G_2 sont isomorphes.

2.2.

2.2.1. On a $\alpha_G(s) = \text{card}\{\{s,t\}/t \in S \ \text{ et } \ \{s,t\} \in A\}$. L'application

$$\varphi_s : V_G(s) \to \{\{s,t\}/t \in S \ \text{ et } \ \{s,t\} \in A\}$$

définie par $\varphi_s(t) = \{s,t\}$ est une bijection (vérification immédiate), donc

$$\text{card}\, V_G(s) = \text{card}\{\{s,t\}/t \in S \ \text{ et } \ \{s,t\} \in A\},$$

ou encore

$$\alpha_G(s) = \text{card}\,(V_G(s))\,.$$

2.2.2. Considérons l'application ψ de $V_G(s)$ dans $V_G(\phi(s))$ définie par $\forall t \in V_G(s)$, $\psi(t) = \phi(t)$.
• ψ est injective, car ϕ est injective.
• Soit $t' \in V_G(\phi(s))$ et $t \in S$ tel que $\phi(t) = t'$. On a $\{\phi(s), t'\} = \{\phi(s), \phi(t)\} \in A'$ et comme ϕ est un isomorphisme de graphes entre G et G', alors $\{s,t\} \in A$ et donc $t \in V_G(s)$.
En conclusion, il existe $t \in V_G(s)$ tel que $\psi(t) = t'$. D'où ψ est surjective.
Donc ψ est bijective et par conséquent $\text{card}\,(V_G(s)) = \text{card}\,(V_G(\phi(s)))$ et d'après la question précédente, on a :

$$\alpha_{G'}(\phi(s)) = \alpha_G(s).$$

2.3. Non, en effet, supposons qu'il existe un isomorphisme φ entre G_1 et G_2. On a :

$$V_{G_1} = \{t \in S_1 / \{1,t\} \in A_1\} = \{\{1,2\},\{1,3\}\},$$

donc $\text{card}(V_{G_1}(1)) = 2$. D'après la question précédente, $\text{card}(V_{G_1}(\varphi(1))) = 2$. Donc nécessairement $\varphi(1) = 2$. Le même raisonnement montre que $\varphi(2) = 2$. Ceci est absurde car φ est une bijection.

3. 3.1. On a $n_G = \text{card}\, S_G$, donc S_G et $[\![1, n_G]\!]$ ont le même nombre d'éléments, donc il existe une bijection ψ de S_G dans $[\![1, n_G]\!]$. En, particulier, $\forall \{s,t\} \in A_G$, $s \neq t$ et donc $\psi(s) \neq \psi(t)$, c'est-à-dire ψ est un bon p-coloriage de G et donc $\psi \in B(n_G, G)$, d'où $f_G(n_G) = \text{card}\, B(n_G, G) \geq 1$ ou encore $n_G \in E(G)$.

3.2. Soit $p \in E(G)$. Fixons $\varphi_p : E \to [\![1,p]\!]$ un bon p-coloriage. Tout d'abord, comme $p+1 > p$, on a $\varphi_p(x) \in [\![1, p+1]\!]$. On peut donc définir une application $\varphi_{p+1} : E \to [\![1, p+1]\!]$ en posant $\varphi_{p+1}(x) = \varphi_p(x)$. Alors comme $\varphi_{p+1}(x) = \varphi_p(x)$ pour tout $x \in S$, on a :

$$\forall (s,t) \in S^2,\ \{s,t\} \in A \Rightarrow \varphi_{p+1}(s) \neq \varphi_{p+1}(t).$$

Par suite φ_{p+1} est un bon $p+1$-coloriage, donc un élément de $B(p+1, G)$. Ceci montre que $p+1 \in E(G)$.

3.3. $E(G)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (il contient n_G). Soit donc θ_G le plus petit élément de $E(G)$ (toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). D'où, d'après la question précédente :

$$E(G) = \mathbb{N} \cap [\theta_G, +\infty[.$$

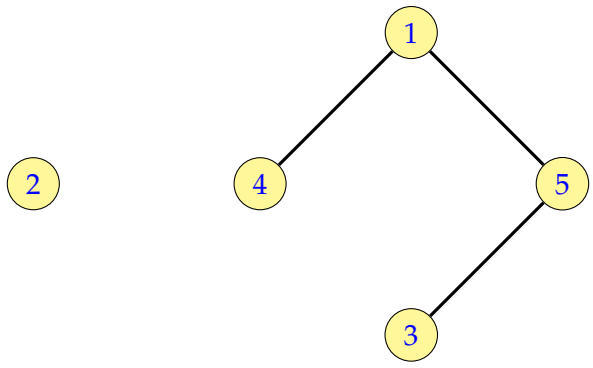
4. 4.1. Si $A_G = \emptyset$, alors toute application de S_G dans $[\![1,p]\!]$ est un bon p-coloriage, donc $B(p,G)$ est l'ensemble de toutes les applications de S_G dans $[\![1,p]\!]$. D'où

$$f_G(p) = \text{card}\, B(p,G) = p^{n_G}.$$

4.2.

4.2.1 • $R(G_4) = \{1,3\} \cup \{1,4\} \cup \{1,5\} \cup \{3,5\} = \{1,2,4,4\}$, d'où $\sigma(G_4) = 1$.
• $\{t \in S_4 / \{1,t\} \in A_4\} = \{3,4,5\}$, donc $\tau(G_4) = 3$.

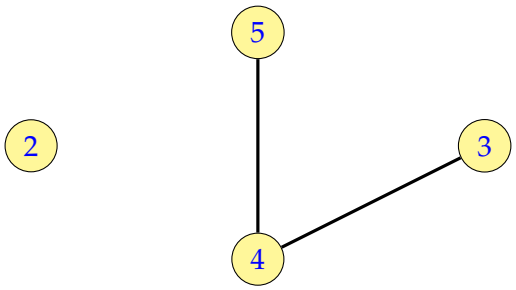
4.2.2. • $\begin{cases} S_{\lambda(G)} = S_{G_4} = \{1,2,3,4,5\} \\ A_{\lambda(G_4)} = A_{G_4} \setminus \{\{1,3\}\} = \{\{1,4\},\{1,5\},\{3,5\}\} \end{cases}$



Graphe $\lambda(G_4)$

et

• $\begin{cases} S_{\mu(G)} = \{2,3,4,5\} \\ A_{\lambda(G_4)} = \{\{3,4\},\{3,5\}\} \end{cases}$



Graphe $\mu(G_4)$

4.2.3. Il est clair que $\operatorname{card} A_{\lambda(G)} = \operatorname{card} A_G - 1 < \operatorname{card} A_G$. Vérifions d'abord que $A_{\mu(G)}$ est bien un ensemble de paires. Si $\{s,t\} \in A_{\mu(G)}$ et $\kappa(s) = \kappa(t)$, on aurait $\{s,t\} = \{\sigma(G), \tau(G)\}$ ce qui est exclu d'après la définition de $A_{\mu(G)}$. L'application κ induit une surjection de $A_{\lambda(G)}$ sur $A_{\mu(G)}$, il en découle que

$$\operatorname{card} A_{\mu(G)} = \operatorname{card}\{\{\kappa(s), \kappa(t)\}/(s,t) \in A_{\lambda(G)}\} \leq \operatorname{card} A_{\lambda(G)} < \operatorname{card} A_G.$$

4.2.4.

4.2.4.1. Les bons p-coloriage de G et les bons p-coloriage de $\mu(G)$ n'ont pas le même domaine de définition, donc $B(p,G) \cap B(p,\mu(G)) = \emptyset$.

4.2.4.2. On a $S_{\lambda(G)} = S_G$. Soit ψ un bon p-coloriage de G, donc ψ est une application de S_G dans $[\![1,p]\!]$ qui vérifie

$$\forall (s,t) \in S_G^2, \quad \{s,t\} \in A_G \Rightarrow \psi(s) \neq \psi(t),$$

et comme $A_{\lambda(G)} \subset A_G$, alors

$$\forall (s,t) \in S_{\lambda(G)}^2, \quad \{s,t\} \in A_G \Rightarrow \psi(s) \neq \psi(t).$$

Donc ψ est un bon p-coloriage de $\lambda(G)$. D'où $B(p,G) \subset B(p,\lambda(G))$.

4.2.4.3. Remarquons que $\tilde{\psi} = \psi \circ \kappa$. Soit $\{s,t\} \in A_{\lambda(G)}$. Alors $\{\kappa(s), \kappa(t)\} \in A_{\mu(G)}$. Comme ψ est un bon p-coloriage pour $\mu(G)$, on a $\psi(\kappa(s)) \neq \psi(\kappa(t))$, c'est-à-dire $\tilde{\psi}(s) \neq \tilde{\psi}(t)$. Ainsi, $\tilde{\psi}$ est un bon p-coloriage pour $\lambda(G)$: $\tilde{\psi} \in B(p,\lambda(G))$.

4.2.4.4. Injectivité : Soient $\psi_1, \psi_2 \in B(p,G) \cup B(p,\mu(G))$ tels que $\Gamma(\psi_1) = \Gamma(\psi_2)$.
• Si $\psi_1, \psi_2 \in B(p,G)$, alors $\Gamma(\psi_1) = \psi_1$ et $\Gamma(\psi_2) = \psi_2$, donc $\psi_1 = \psi_2$.
• Si $\psi_1, \psi_2 \in B(p,\mu(G))$, alors $\Gamma(\psi_1) = \tilde{\psi}_1$ et $\Gamma(\psi_2) = \tilde{\psi}_2$, donc $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2$ et donc $\psi_1(s) = \psi_2(s)$ pour tout $s \neq \sigma(G)$ ceci implique que $\psi_1(s) = \psi_2(s)$ pour tout $s \in S_{\mu(G)}$, donc $\psi_1 = \psi_2$.
• Si $\psi_1 \in B(p,G)$ et $\psi_2 \in B(p,\mu(G))$ alors nécessairement $\psi_1 \neq \psi_2$ (d'après ?). On a

$$\tilde{\psi}_(\sigma(G)) = \tilde{\psi}_2(\sigma(G)) = \psi_2(\tau(G))$$

et si $s \neq \sigma(G)$, $\psi_1(s) = \tilde{\psi}_2(s) = \psi_2(s)$ en particulier

$$\psi_1(\tau(G)) = \psi_2(\tau(G)) = \psi_1(\sigma(G))$$

ce qui est absurde, car $\{\sigma(G), \tau(G)\} \in A_G$, donc $\psi_1(\tau(G)) \neq \psi_1(\tau(G))$. En conclusion, l'application Γ est injective.
Surjectivité : Soit φ un bon p-coloriage de $\lambda(G)$, deux cas sont possibles :

• $\varphi(\sigma(G)) \neq \varphi(\tau(G))$.
• $\varphi(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G))$.
Si $\varphi(\sigma(G)) \neq \varphi(\tau(G))$, alors φ est un bon p-coloriage de G et donc $\Gamma(\varphi) = \varphi$.
Si $\varphi(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G))$, alors $\tilde{\varphi} = \varphi$, en effet $\begin{cases} \tilde{\varphi}(\sigma(G)) = \varphi(\tau(G)) \\ \tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) \text{ si } s \neq \sigma(G). \end{cases}$
D'où $\tilde{\varphi} = \varphi$ et par conséquent $\tilde{\varphi} = \Gamma(\varphi)$.
En conclusion, Γ est une bijection et par comparaison des cardinaux, on obtient :

$$\operatorname{card} B(p, G) + \operatorname{card} B(p, \mu(G)) = \operatorname{card} B(p, \lambda(G)$$

car $B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \emptyset$.

4.2.5. L'égalité précédente, entre cardinaux, s'écrit encoure sous la forme :

$$f_G(p) + f_{\mu(G)}(p) = f_{\lambda(G)}$$

et ceci $\forall p \in \mathbb{N}^*$. D'où :

$$f_G = f_{\lambda(G)} - f_{\mu(G)}.$$

5. On va procéder par récurrence sur $\operatorname{card} A_G$ (le nombre d'arêtes).
• Si $\operatorname{card} A_G = 0$, c'est-à-dire $A_G = \emptyset$, $f_G(p) = p^{n_G}$ (d'après la question 6.)
• Supposons maintenant $\operatorname{card} A \geq 1$. D'après ce qui précède

$$f_G = f_{\lambda(G)} - f_{\mu(G)}.$$

Les graphes $\lambda(G)$ et $\mu(G)$ contiennent tous deux $\operatorname{card} A - 1$ arêtes. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des entiers $a_0, a_1, ..., a_{n_G}$ tels que

$$f_{\lambda(G)}(p) = \sum_{k=0}^{n_G} a_k p^k, \quad (\operatorname{card} S_g = \operatorname{card} S_{\lambda(G)} = n_G)$$

avec $a_{n_G} \neq 0$.
De même , il existe des entiers $b_0, b_1, ..., b_{n_G - 1}$ tels que

$$f_{\lambda(G)}(p) = \sum_{k=0}^{n_G - 1} b_k p^k, \quad (\operatorname{card} S_g = \operatorname{card} S_{\mu(G)} = n_G - 1)$$

avec $b_{n_G - 1} \neq 0$. D'où

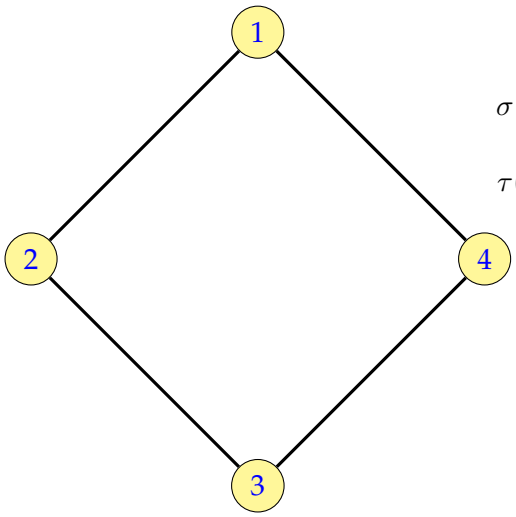
$$f_G(p) = a_{n_G} p^{n_G} + \sum_{k=1}^{n_G - 1} (a_k - b_k) p^k.$$

Donc f_G est une fonction polynomiale en p de degré n_G.

6. Si ϕ est un isomorphisme de G sur G', alors on vérifie que :
☐ Si ψ' est un bon p-coloriage de G', $\psi' \circ \phi$ est un bon p-coloriage de G.
☐ Si ψ est un bon p-coloriage de G, $\psi \circ \phi^{-1}$ est un bon p-coloriage de G'.
L'application $\psi \mapsto \psi \circ \phi^{-1}$ définit donc une bijection de $B(p, G)$ vers $B(p, G')$, qui ont donc même nombre d'éléments. Par suite $f_{G'} = f_G$ si G et G' sont deux graphes isomorphes.

7.

7.1.

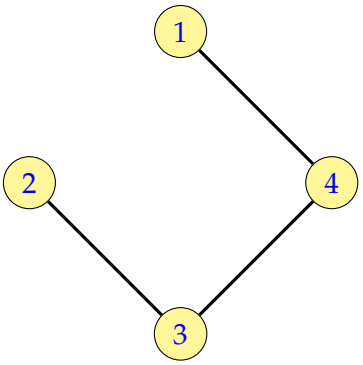


$\sigma(G)) = 1$

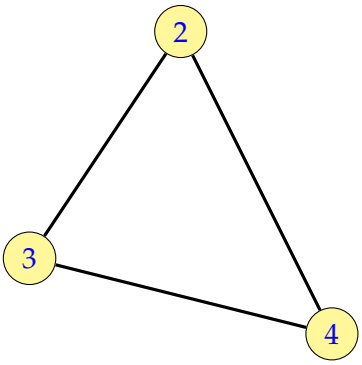
$\tau(G)) = 2$

Graphe G

D'où

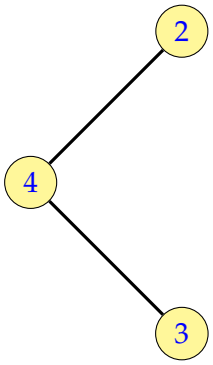


et

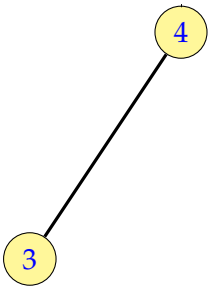


Graphe $\lambda(G))$ Graphe $\mu(G))$

Ensuite, $\sigma(\mu(G) = 2$ et $\tau(\mu(G)) = 3$, ce qui donne :



et



Graphe $\lambda(\mu(G))$ Graphe $\mu(\mu(G))$

D'après la relation de la question précédente, on a :

$$f_G(p) = f_{\lambda(G)}(p) - f_{\mu(G)}(p)$$

et

$$f_{\mu(G)}(p) = f_{\lambda(\mu(G))}(p) - f_{\mu(\mu(G))}(p)$$

D'où

$$f_G(p) = f_{\lambda(G)}(p) - f_{\lambda(\mu(G))}(p) + f_{\mu(\mu(G))}(p).$$

Soit φ un bon p-coloriage de $\lambda(G)$, il y a p choix possibles pour $\varphi(1)$, $p-1$ choix pour $\varphi(2), \varphi(3)$ et $\varphi(4)$. D'où

$$f_{\lambda(G)}(p) = p(p-1)^3.$$

De même

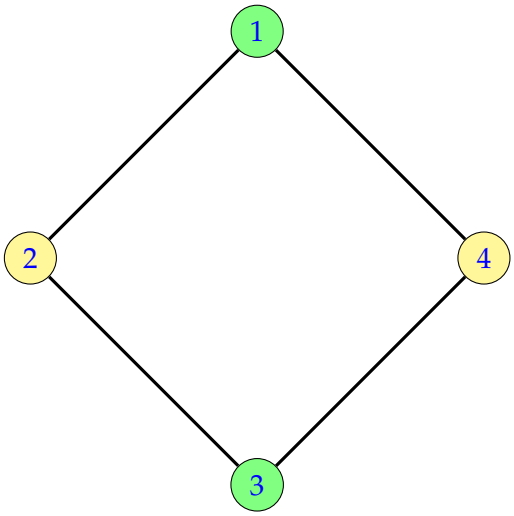
$$f_{\lambda(\mu(G))}(p) = p(-1)^2$$

et $f_{\mu(\mu(G))}(p) = p(p-1)$ ce qui donne :

$$f_G(p) = p(p-1)^3 - p(p-1)^2 + p(p-1) = p(p-1)(p^3 - 3p + 3).$$

7.2. On a $f_G(1) = 0$ et $f_G(2) \neq 0$, d'où :

$$\theta_G = \min\{p \in \mathbb{N}^* / f_G(p) \neq 0\} = 2.$$



Remarque : Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier chaque sommet du graphe G de façon que deux sommets adjacents quelconques soient de couleurs différentes est 2, c'est le nombre chromatique θ_G.

Problème 2

1.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n$ et $Z \in \mathbb{C}^n$. Si Z est nul, l'inégalité est bien vérifiée. Si Z est non nul, alors par définition de la borne supérieure, on a :

$$\tilde{N}(A) \geq \frac{N(AZ)}{N(Z)}$$

Donc, $\forall Z \in \mathbb{C}^n$, $N(AZ) \leq \tilde{N}(A)N(Z)$.

1.2 Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ non nul, on a :

$$N_\infty(AZ) = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j\right| \leq \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||z_j| \leq \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| N_\infty(Z)$$

On obtient donc $\tilde{N}_\infty(A) \leq \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1.3 Supposons $\sup_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ atteint pour $i=i_0$ et considérons le vecteur Z tel que $\forall j,\ |z_j|=1$, avec $a_{i_0j}z_j=|a_{i_0j}|$, on a donc :

$$N_\infty(AZ)\leq\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i_0j}z_j\right|=\sum_{j=0}^{n}|a_{i_0j}|=\sup_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.N_\infty(Z)$$

Il en résulte $\tilde{N}_\infty(A)=\sup_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

2.1 Si Z est non nul, alors il existe un indice i_0 tel que $z_{i_0}\neq 0$. Par suite, $(Z^tZ)_{i_0i_0}\neq 0$. Donc la matrice Z^tZ est non nulle.

2.2 Soit Z un vecteur propre non nul de A, associé à la valeur propre λ de valeur absolue $|\lambda|=\rho(A)$. Alors

$$\rho(A)\psi(Z^tZ)=\psi(AZ^tZ)\leq\psi(A)\psi(Z^tZ)$$

Comme Z est non nul, alors d'après la question précédente Z^tZ est non nul et donc $\psi(Z^tZ)$ n'est pas nul. D'où $\rho(A)\leq\psi(A)$.

3.1 A et T ont le même polynôme caractéristique, donc S est le spectre de A.

3.2 On a :

$$\begin{aligned}V_\delta^{-1}AV_\delta=D_\delta^{-1}U^{-1}AUD_\delta=D_\delta^{-1}TD_\delta &= D_\delta^{-1}(t_{ij}\delta^{j-1})_{1\leq i,j\leq n}\\ &= (t_{ij}\delta^{j-1}\delta^{1-i})_{1\leq i,j\leq n}\\ &= (t_{ij}\delta^{j-i})_{1\leq i,j\leq n}\end{aligned}$$

Donc $V_\delta^{-1}AV_\delta=(t_{ij}\delta^{j-i})_{1\leq i,j\leq n}$

3.3 L'expression $\sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}|\delta^{j-i}$ est un polynôme en δ, s'annulant en 0, par continuité en 0, il existe $\delta_\varepsilon>0$ vérifiant la propriété :

$$\sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}|\delta_\varepsilon^{j-i}\leq\varepsilon$$

3.4 On a

$$\begin{aligned}\psi(A)=\tilde{N}_\infty(VAV) &= \tilde{N}_\infty((t_{ij}\delta^{j-i})_{1\leq i,j\leq n})\\ &= \sup_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}\delta^{j-i}|\\ &\leq \sup_{i\in[\![1,n]\!]}|t_{ii}|+\sup_{i}\sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}\delta^{j-i}|\\ &\leq \sup_{i\in[\![1,n]\!]}|t_{ii}|+\varepsilon\end{aligned}$$

D'où $\psi(A)\leq\rho(A)+\varepsilon$

3.5 On a

$$\begin{aligned}\psi(B)=\tilde{N}_\infty(VAV) &= \sup_{Z\neq 0}\frac{N_\infty(V^{-1}AVZ)}{N_\infty(Z)}\\ &= \sup_{Z\neq 0}\frac{N_\infty(V^{-1}AVV^{-1}Z)}{N_\infty(V^{-1}Z)}\\ &= \sup_{Z\neq 0}\frac{N_\infty(V^{-1}AZ)}{N_\infty(V^{-1}Z)}\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que V est une bijection. L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nul peut alors être représenté par $V^{-1}Z$ avec Z non nul.
Posons $N(Z)=N_\infty(V^{-1}Z)$, et vérifions que N est une norme :

- $N(Z)=0\Leftrightarrow N_\infty(V^{-1}Z)=0\Leftrightarrow V^{-1}Z=0\Leftrightarrow Z=0$.
- $N_\infty(V^{-1}(\lambda Z))=N_\infty(\lambda V^{-1}Z)=|\lambda|N_\infty(V^{-1}Z)$, d'où
$$N(\lambda Z)=|\lambda|N(Z).$$
- $N_\infty(V^{-1}(Z_1+Z_2)=N_\infty(V^{-1}Z_1+V^{-1}Z_2)\leq N_\infty(V^{-1}Z_1)+N_\infty(V^{-1}Z_2)$, d'où
$$N(Z_1+Z_2)\leq N(Z_1)+N(Z_2).$$

4.1 Supposons que $\lim_{k\to\infty}A^k=0$. Donc, par équivalence des normes, $\lim_{k\to\infty}\tilde{N}_\infty(A^k)=0$. L'inégalité $N_\infty(A^kZ)\leq\tilde{N}_\infty(A^k)N_\infty(Z)$ montre que $\lim_{k\to\infty}A^kZ=0$.

4.2 Soit $Z\in\mathbb{C}^n$ tel que $AZ=Z$ avec $|\lambda|=\rho(A)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}A^kZ=0 &\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}N_\infty(\lambda^kZ)=0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty}|\lambda|^kN_\infty(Z)=0\\ &\Rightarrow |\lambda|<1\\ &\Rightarrow \rho(A)<1\end{aligned}$$

Donc $\lim_{k\to\infty}A^kZ=0\Rightarrow\rho(A)<1$.

4.3 Si $\rho(A)<1$, on peut trouver $\varepsilon>0$ avec $\rho(A)+\varepsilon<1$. Les questions 3.4 et 3.5 nous indiquent alors qu'i existe une norme N telle que $\tilde{N}(A)<1$.

4.4 La norme matricielle $\tilde{N}$ vérifie l'inégalité $\tilde{N}(A^k)\leq[\tilde{N}(A)]^k$. Donc si $\tilde{N}(A)<1$, alors $\lim_{k\to\infty}\tilde{N}(A^k)=0$.

5.1 Comme f est σ-lipschitzienne, on a

$$N(f(Z_{k+1})-f(Z_k))\leq\sigma N(f(Z_k)-f(Z_{k-1}))$$

Par itération de cette formule, on obtient

$$N(f(Z_k)-f(Z_{k-1}))\leq\sigma^kN(f(Z_0)-Z_0)$$

On en déduit alors que, quels que soient $p<q$, on peut écrire

$$\begin{aligned}N(Z_q-Z_p) &\leq N(Z_q-Z_{q-1})+N(Z_{q-1-Z_{q-2}}+\ldots+N(Z_{p+1}-Z_p)\\ &\leq \sum_{j=p}^{q}\sigma^jN(f(Z_0)-Z_0)\\ &\leq \sigma^p\frac{1-\sigma^{q+1-p}}{1-\sigma}N(f(Z_0)-Z_0)\\ &\leq \frac{\sigma^p}{1-\sigma}N(f(Z_0)-Z_0)\end{aligned}$$

Ce dernier terme tendant vers 0 quand p tend vers l'infini. La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace $\mathbb{C}^n$ qui est complet. Donc la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5.2 Soit X la limite de la suite précédente. Par passage à la limite dans l'égalité $Z_{k+1} = f(Z_k)$, on voit bien que X est un point fixe de f.
Supposons que X et Y soient deux points fixes distincts de f. Alors

$$N(Y - X) = N(f(Y) - f(X)) \leq \sigma N(Y - X) < N(Y - X),$$

ce qui est impossible si X et Y sont différents.
On a donc montré l'unicité du point fixe de f.

6. Posons $f(Z) = BZ + W$. On a

$$\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^n, \quad f(Z_1) - f(Z_2) = B(Z_1 - Z_2).$$

Donc, pour tout norme N sur $\mathbb{C}^n$, on a :

$$N(f(Z_1) - f(Z_2)) \leq \tilde{N}(B)N(Z_1 - Z_2).$$

Supposons $\rho(B) < 1$, alors il existe une norme N telle que f soit $\rho(B)$-lipschitzienne. Donc la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_{n+1} = f(Z_n))$ converge vers l'unique point fixe de f.
Inversement, supposons qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ tel que, pour tout Z_0, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme précédemment tende vers X, et que $\rho(B) \geq 1$. Alors, on a

$$Z_{k+1} - X = B(Z_k - X)$$

qui tend vers 0. Mais si on prend Z_0 tel que $Z_0 - X$ soit un vecteur propre de B pour la valeur propre λ de valeur absolue $|\lambda| = \rho(B)$, on alors $Z_{k+1} - X = \lambda^{k+1}(Z_0 - X)$ qui ne tend pas vers 0, puisque $|\lambda| \geq 1$.
Donc la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\rho(B) < 1$.

7. On pose $f(z) = FQZ - FY$. Comme $\rho(FQ) < 1$, on a vu que toute suite de la forme $Z_{k+1} = f(Z_k)$ converge vers l'unique X tel que $X = FQX - FY$, ce qui est équivalent à $MX = QX - Y$, et donc $AX = Y$.

••••••••••